日本数学協会講演（「ライプニッツの数学」について）

2016 年 9 月 11 日
学習院中等科・高等科
林　知宏

1　ライプニッツの数学的貢献

1.1　数学的貢献

1) 無限小解析（微分積分学）:

   (a) （円をはじめとする）円錐曲線の算術的求積，

   (b) 接線法・逆接線法を通じた微分計算とその逆計算の公式化，

   (c) 上記にとって本質的な記号 dx，$\int$ の導入,「関数」（functio）,「座標」（coordinata）,「超越的」（transcendens）といった用語の使用，

   (d) 超越曲線（サイクロイド，懸垂線等）への接線法，求積法の研究，

   (e) 未定係数法による無限級数の決定法，

   (f) 「包絡線」の発想を用いた曲線の構成，

   (g) 無限小解析の基礎をめぐる論争，

   (h) 有理量（分数関数）の積分，

   (i) 2 項展開とのアナロジーによる積の微分計算公式（いわゆる「ライプニッツの公式」）.

2) 位置解析（analysis situs）: 記号による位置の表示と点の軌跡による図形の表現→ユークリッド『原論』改良を意図した基本図形の定義づけと諸命題の創出.[1]

3) 方程式論：

   (a) 高次方程式の解の公式（「カルダーノの公式」）; [2]

$$y^3 \pm qy - r = 0 \to y = \sqrt[3]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \pm \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \pm \frac{q^3}{27}}},$$

$$x^3 - 13x - 12 = 0 \to x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}} = 2 + \sqrt{-\frac{1}{3}} + 2 - \sqrt{-\frac{1}{3}} = 4,$$

   (b) 「行列式」における符号規則（互換,「クラメルの公式」），不定方程式論.[3]

4) 確率論：公理論的確率論，保険・年金数学.[4]

---

[1] [ライプニッツ 1999]，47-54，166-175，245-293 頁，[Leibniz CG] 参照.
[2] [ライプニッツ 1997]，177-202 頁.
[3] [ライプニッツ 1999]，364-378 頁，[Leibniz A], 7-1 参照.
[4] [Leibniz EA], [Leibniz 2000] 参照.

5) 2 進法計算：中国古代思想との関連．[5]

6) 普遍数学（mathesis universalis）概念，普遍学（scientia generalis）構想：数学的学問を基礎において旧来の学問を統合再編し，新学問の発見，開拓を目指す．百科全書への道．[6]

2 ライプニッツの無限小解析（微分積分学）

2.1 変換定理による算術的求積

○ 1674 年 10 月ホイヘンス宛書簡→ $\frac{\pi}{4}$ 公式（式（1））の導出が論文形式で表明される，[7]
● 1682 年論文「有理数によって表された外接正方形に対する円の真の比について」（図 1）：[8]

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots (\text{‘}\mathit{Numero\ Deus\ impare\ gaudet.}\text{’}) . \tag{1}$$

○最晩年の手稿「微分算の歴史と起源」（1714 頃執筆），未刊の著作（1993 年刊））．[9]

2.2 極大・極小法のアルゴリズム化

☆接線問題，逆接線問題を通じた記号法の開発と方法論の明確化→ 1676 年頃までに確立：

- $omn.\ l \rightarrow \int l$ という書き換え，$\int l = ya \Rightarrow l = \frac{ya}{d}$（「$\int$ は和を，d は差を表わす」）

● 1684 年論文「分数量や無理量に煩わされない極大・極小，ならびに接線を求める新方法」（図 2）：[10]

- 微分（差分）量を表す記号 dx と比例による正当化，
- 基本計算公式（定数倍 $d\overline{ax} = adx$，和・差 $d\overline{z - y + w + x} = dz - dy + dw + dx$，積 $d\overline{xv} = xdv + vdx$，ベキ乗 $dx^a = ax^{a-1}dx$，$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$，分数量 $d\frac{v}{y} = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$），
- 「曲線図形＝無限辺多角形」,「接線＝曲線上の無限に小さい距離を持つ 2 点を結ぶ直線」．

2.3 超越曲線の求積

● 1686 年論文「深奥なる幾何学ならびに不可分量と無限の解析について」→「微分方程式（aequatio differetialis）」から「求和方程式（aequatio summatrix）」へ，サイクロイドの求積．[11]
● 1691 年論文「柔軟なものが自身の重さによって描く曲線について，$\cdots$」→懸垂線の構成と求積

[5][ライプニッツ 1999]，92-97，351-362 頁，[Leibniz LHD] 参照．
[6][ライプニッツ 1988]，12-52 頁，[ライプニッツ 1997]，24-66 頁，[Leibniz A], 6-4 参照．
[7][ライプニッツ 1997]，134-145 頁．
[8][ライプニッツ 1997]，279-286 頁．
[9][ライプニッツ 1999]，317-323 頁，[Leibniz 1993] 参照．
[10][ライプニッツ 1997]，296-307 頁．
[11][ライプニッツ 1997]，319-330 頁．

問題．[12]

● 1694 年論文「微分算の新しい適用と，接線に関して与えられた条件から線を様々な形で作図することへの応用」→「包絡線」の発想，曲線のパラメーター表示,「偏微分」．曲線群 $f(x,y,b)=0 \to f(x,y,b)=0,\ f_b(x,y,b)=0$ からパラメータ b を消去し，曲線を定める（図 3）：[13]

$$\text{例：曲線群 } x^2+y^2+b^2=2bx+c^2,\ ab=c^2 \to x^2+y^2+b^2=2bx+ab \tag{2}$$

$$\text{式（2）を } b \text{ で微分} \to 2bdb=2xdb+adb \to b=x+\frac{a}{2} \tag{3}$$

$$\to\text{式（3）を式（2）に代入し，曲線の式 } y^2=ax+\frac{a^2}{4} \text{ を得る．}$$

○ 1696 年 6 月 16 日付ヨハン・ベルヌーイ宛書簡→最速降下線問題（図 4）．[14]

2.4 未定係数法による無限級数の決定

● 1693 年論文「無限級数による極めて一般的な新しい方法を用いて超越的な問題にも拡張される実用幾何学についての補説」：[15]

- 双曲線下の面積（有理関数の積分 $\int \frac{adx}{a+x}$ を求める，a は定数），

$$dy=\frac{adx}{a+x} \iff a\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}-a=0 \tag{4}$$

- 式（4）に対して，形式的に $y=bx+cx^2+ex^3+fx^4+\cdots$ と無限級数を作る，

$$\begin{aligned} a\frac{dy}{dx} &= ab+2acx+3aex^2+4afx^3+\cdots \\ x\frac{dy}{dx} &= \qquad bx+\ 2cx^2+\ 3ex^3+4fx^4+\cdots \\ -a &= -a \end{aligned}$$

- 定数項の比較により $ab-a=0$ から $b=1$，x の 1 乗の項については，$2ac+b=0$ から $c=-\frac{1}{2a}$ となり,（以下同様に係数の比較から）

$$y=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^4}{4a^3}+\cdots$$

- 無限級数の逆表示の試み,（$x=ly+my^2+ny^3+py^4+\cdots$ と形式的に展開し,）

$$\begin{aligned} a+x &= a \quad +ly \quad +my^2 \ + \ ny^3+ \ py^4+\cdots \\ -a\frac{dx}{dy} &= -la-2amy-3any^2-4apy^3-5aqy^4+\cdots \end{aligned}$$

[12][ライプニッツ 1997]，352-358 頁.
[13][ライプニッツ 1999]，59-67 頁.
[14][ライプニッツ 1999]，100-107 頁.
[15][ライプニッツ 1999]，12-16 頁.

$$x=\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1\cdot 2\cdot a}+\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^2}+\frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a^3}+\cdots$$

○ニュートンとの書簡交換「前の書簡」（1676年6月13日（旧）付）とその返書（1676年8月27日（新）付）．[16]

2.5　有理量の求積

● 1702年，1703年論文「和と求積に関する無限の学問における解析の新しい例」,「有理求積の解析続論」→分数量の分母を1次式，あるいは2次式に分解し，分子が定量の有理分数に帰着（$\int \frac{l}{x+e}dx$（双曲線の求積），または$\int \frac{mx+n}{x^2+fx+ag}dx$（双曲線，円の求積）へ帰着），虚根,「代数学の基本定理」: [17]

$$例：\int \frac{1}{x^4-1}dx=\frac{1}{4}\int(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1})dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

☆分母に1次因数のベキを含む場合への言及（式（5））: $h=x+a$，$l=x+b$，$b-a=\omega$，$a-b=\psi$ のとき,（$t=4$，$v=3$ の例示から一般化）

$$\frac{1}{h^t l^v}=\begin{cases} \frac{1}{\omega^v h^t}-\frac{\frac{v}{1}}{\omega^{v+1}h^{t-1}}+\frac{\frac{v(v+1)}{1\times 2}}{\omega^{v+2}h^{t-2}}-\frac{\frac{v(v+1)(v+2)}{1\times 2\times 3}}{\omega^{v+3}h^{t-3}}+\cdots \\ +\frac{1}{\psi^t l^v}-\frac{\frac{t}{1}}{\psi^{t+1}l^{v-1}}+\frac{\frac{t(t+1)}{1\times 2}}{\psi^{t+2}l^{v-2}}-\frac{\frac{t(t+1)(t+2)}{1\times 2\times 3}}{\psi^{t+3}l^{v-3}}+\cdots \end{cases} \quad (5)$$

☆虚根＝「エレガントで驚くべき迂回路（effugium）」,「解析における奇蹟（miraculum）」,「観念の世界の怪異（monstrum）」,「存在と非存在との間にまたがるもの（amphibium）」

☆実係数の n 次多項式→実係数の1次因数と2次因数の積に分解できる．

$$\int\frac{1}{x^4+a^4}dx\to x^4+a^4=(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}})$$

2.6　ライプニッツの公式

● 1710年論文「ベキと微分の比較による代数計算と無限小計算の注目すべき対応．$\cdots$」→「ライプニッツの公式」: [18]

$$d^e(xy)=1d^exd^0y+\frac{e}{1}d^{e-1}xd^1y+\frac{e.e-1}{1.2}d^{e-2}xd^2y+\frac{e.e-1.e-2}{1.2.3}d^{e-3}xd^3y+\cdots$$

←二項展開 $p^e(x+y)$ とのアナロジー（「量と式の間には大きな違いがある」,「ベキと微分の間には何らかのより深遠なる類似性が隠れている」）．

$$p^e(x+y)=1p^exp^0y+\frac{e}{1}p^{e-1}xp^1y+\frac{e.e-1}{1.2}p^{e-2}xp^2y+\frac{e.e-1.e-2}{1.2.3}p^{e-3}xp^3y+\cdots$$

$$d(xy)=ydx+xdy=d^1xd^0y+d^0x+d^1y,\leftarrow p^1(x+y)=x+y,$$

$$dd(xy)=d(ydx+xdy)=yddx+2dydx+xddy=d^0\times d^2y+2d^1xd^1y+d^2xd^0y\leftarrow p^2(x+y)=1xx+2xy+1yy$$

[16][Newton C], 2, pp. 20-41, [Leibniz A], 3-1, S. 558-586, [ライプニッツ 1997]，225-228頁参照．
[17][ライプニッツ 1999]，207-221頁．[Leibniz GM], 5, S. 361-366.
[18][ライプニッツ 1999]，229-236頁．

2.7　無限小をめぐる論争，先取権論争

☆無限小をめぐる論争→無限小「量」の存在論的疑義，古典的規範との整合性の問題.
● 1695 年論文「微分あるいは無限小の方法に関するベルナルド・ニーウェンテイト師によって提起された若干の困難に対する返答」: [19]

1) 無限小は 0 ではないのか→「等しい」=「その差が完全に 0 である」,「その差が比べられないくらい小さい」,「完全に 0 であると言わなくとも，ただその差と比較可能な量がない」,
2) 微分法は指数部分が不定量である場合（例えば，$z = y^x$）の曲線の方程式には適用されない→「対数微分」の技法,
3) 1 階の微分量が存在するとしても 2 階，3 階，$\cdots$ という微分量があり得るのか→特殊な例における正当化，運動，速度との対比.

$$x:\text{幾何数列}, y:\text{算術数列} \Rightarrow dy : dx = a : x \iff dx = \frac{xdy}{a} \rightarrow ddx = \frac{dxdy}{a} \iff x : dx = dx : ddx$$

○ 1702 年 2 月 2 日，4 月 14 日付ヴァリニョン宛書簡：[20]

1) 無限大，無限小を現実に存在するものと認めない,
2) 無限小と虚量のアナロジー→「有益な，実在に基礎づけられた作り物」（fictions estant utiles et fondées en realité）,
3) 帰謬法によって証明を行なってきたアルキメデスと表現において異なるのみ,「発見の技法（ars inveniendi）に合致している」,
4) 共範疇的（syncategorematique），連続律.

☆ニュートン派と無限小解析の先取権をめぐって論争（1699 年以降）.
○無限級数法，接線法の第 1 発見者，基礎概念，記号法→ 1714 年手稿「微分算の歴史と起源」. [21]

3　関数概念について

3.1　ライプニッツの「関数」概念

○ 1673 年 8 月手稿→ライプニッツが “functio” という用語を初めて使用する，[22]
● 1692 年論文「順序立てて引かれ，互いに交わる無限に多くの線から形成された線とそれらすべてに接する線について」で初めて公になる→ 1694 年論文にも記述→曲線にまつわる様々な「関連量」（=横線，縦線，接線，法線，接線影，法線影，等々）（図 5）, [23]
○ 1714 年手稿「微分算の歴史と起源」における使用→曲線の種類にかかわらず微分 dx, ddx や「微分の逆の総和」（=積分）を x 自体の functio と見る．ベキや根 $x, xx, x^3, \sqrt{x}$ を「量の functio」と称する.

[19][Leibniz GM], 5, S. 320-328.
[20][Leibniz GM], 4, S. 91-95, 97-99.
[21][ライプニッツ 1999]，305-335 頁.
[22][Leibniz A]，7-4, S. 656-710.
[23][Leibniz GM], 5, S. 266-269, [ライプニッツ 1999]，59-67 頁.

3.2　オイラーの関数概念

●『無限解析入門』（1748 年刊）第 1 巻における関数概念：[24]

- 変量（quantitas variabilis，虚数も含む），定量を用いて組み立てられた「解析的表示式」（expressio analytica）（第 1 章），
- 変量 y が変量 z の関数 $\Rightarrow z$ も y の関数（第 1 章），
- y が z の関数，z は他の変量 x によって規定される $\Rightarrow y$ も x によって規定される（第 3 章），
- 2 個または，それ以上の個数の変量によって「どのようにであれ組み立てられた表示式」（第 5 章）．

○『無限解析入門』第 2 巻における関数の幾何学的表示：[25]
→量的な関係を前提とし，変量 x（横に伸びる不定直線（abscissa）上に表示）対応する y の値（横線に垂直な線分として表示）によって姿が描かれる→関数 y により作り出される曲線（第 1 章）．
☆関数の分類（第 1 巻第 1 章）：[26]

1) 代数関数（functio algebraica）＝「代数的な演算（変量の定数倍，四則演算，ベキ乗，根を開くこと）のみを用いて組み立てられる関数」→例：$\dfrac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}$；
    - 有理関数（functio raionalis）（整関数，分数関数，整数ベキのみ含む）→例：$\dfrac{a^2+z^2}{a+z}$,
    - 非有理関数（functio irrationalis）
        - 陽関数（functio explicita，ベキ根記号で表示可能）→例: $\sqrt[3]{a-2z+z^3}$, $\dfrac{a^2-z\sqrt{a^2-z^2}}{a+z}$,
        - 陰関数（functio implicita，方程式で表示される））→例：$Z^7=azZ^2-bz^5$,
2) 超越関数（functio transcendens）＝「超越的演算が変量に作用」→例：a^z, $z=\log y$，＋「内越的な」関数（functio interscendens）＝（無理量による）ベキ乗を含む関数→例：$z^{\sqrt{2}}$）．

3.3　『無限解析入門』第 1 巻に見られるライプニッツ流微分積分学の展開

☆「分数関数」について（第 2 章）：[27]

- 分数関数 $\dfrac{M}{N}$ →つねに分母 N が持つ互いに素な単純因子（実因子，あるいは虚因子）と同個数の単純分数 $\dfrac{A}{p-qz}$ に分解可能．

---
[24] [オイラー 2001]，2，8，41，71f 頁
[25] [オイラー 2005]，2-5 頁
[26] [オイラー 2001]，3ff 頁.
[27] [オイラー 2001]，26-40 頁.

☆三角（関数）の無限級数表示,「オイラーの公式」（第 8 章）: [28]

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 + \cdots$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \cdots$$

（弧 z：無限小, $n = i$：「無限大数」, $iz =$ 有限数$\nu \to \sin z = z = \frac{\nu}{n} = \frac{\nu}{i}$, $\cos z = 1$, $(1+\frac{z}{i})^i = e^z$）

$$\to \cos\nu = 1 - \frac{\nu^2}{1\cdot 2} + \frac{\nu^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\nu^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$

$$\to \sin\nu = \nu - \frac{\nu^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\nu^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{\nu^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

$$\cos\nu = \frac{(1+\frac{\nu\sqrt{-1}}{i})^i + (1-\frac{\nu\sqrt{-1}}{i})^i}{2}, \sin\nu = \frac{(1+\frac{\nu\sqrt{-1}}{i})^i - (1-\frac{\nu\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}} \to e^{+\sqrt{-1}} = \cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu$$

4 文献

1 次文献（翻訳も含む）

[Euler 1748] Euler, Leonhard, *Introductio in analysin infinitorum*, Vol. 1, 2 (1748_1)(Bruxelles: Culture et Civilisation, 1967).

[Leibniz A] *Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin(Berlin: Akademie Verlag, 1923-).

[Leibniz CG] *G. W. Leibniz la caractéristique géométrique*, Texte établi par Javier Echeverría et traduit par Marc Parmentier(Paris: J. Vrin, 1995).

[Leibniz EA] *G. W. Leibniz l'estime des apparences*, Texte établi par Marc Parmentier(Paris: J. Vrin, 1995).

[Leibniz GM] *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1849-1863_1)(Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971) .

[Leibniz LHD] *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz: Ein Beitrag zur geschichte des binären Zahlensystems*, herausgegeben von Hans J. Zacher(Frankfurt am Mein: Vittorio Klostermann, 1973).

[28][オイラー 2001], 114f, 120 頁.

[Leibniz 1993] Gottfried Wilhelm Leibniz, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch(Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1993).

[Leibniz 1995] *G. W. Leibniz naissance du calcul différentiel*, Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier(Paris: J. Vrin, 1995).

[Leibniz 2000] *Gottfried Wilhelm Leibniz Hauptschriften zur Versicheruns- und Finanzmathematik*, herausgegeben von Eberhard Knobloch und J.- Matthias Graf (Berlin: Akademie Verlag, 2000).

[L'Hospital 1696] L'Hospital, Guillaume François Antoine，*Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris, 1696).

[Newton C] *The Correspondence of Isaac Newton*, edited by H. W. Turnbull *et al.*(Cambridge: Cambridge University Press, 1959-1977).

[Newton MP] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, edited by D. T. Whiteside(Cambridge: Cambridge University Press, 1967-81).

[Newton Principia] Newton, Isaac, *Philosophiae naturalis principia mathematica*(3rd ed., 1726), assembled and edited by Alexandre Koyré and I. Bernard Cohen(Cambridge: Harvard University Press, 1972).

[オイラー 2001] オイラー，レオンハルト,『オイラーの無限解析』，高瀬正仁訳（海鳴社，2001 年）.

[オイラー 2005] オイラー，レオンハルト,『オイラーの解析幾何』，高瀬正仁訳（海鳴社，2005 年）.

[カッシーラー 1989–97] カッシーラー，E.『シンボル形式の哲学』（一）〜（四）木田元・生松敬三・村岡晋一訳（岩波文庫，1989-97 年）.

[フッサール 1968–76] フッサール，E.『論理学研究』全 4 巻，立松弘孝・松井良和・赤松宏訳（みすず書房，1968-76 年）.

[ライプニッツ 1988] 『ライプニッツ著作集』1『論理学』沢口昭聿訳（工作舎，1988 年）.

[ライプニッツ 1997] 『ライプニッツ著作集』2『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳（工作舎，1997 年）.

[ライプニッツ 1999] 『ライプニッツ著作集』3『数学・自然学』原亨吉・横山雅彦・三浦伸夫・馬場郁・倉田隆・西敬尚・長嶋秀男訳（工作舎，1999 年）.

2 次文献

[Aiton 1985] Aiton, E. J., *Leibniz: A Biography*(Bristol and Boston: Adam Hilger LTD, 1985).

[Antognazza 2008] Antognazza, Maria Rosa，*Leibniz: An Intectual Biography*(Cambridge etc.: Cambridge University Press, 2008).

[Bos 1974] Bos, Henk J. M., “Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus,” *Archive for History of Exact Sciences*, **14**(1974), pp. 1-90.

[Cassirer 1902] Cassirer, Ernst, *Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen*(1902_1)(Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1980).

[Couturat 1901] Couturat, Louis, *La logique de Leibniz: d'après des documents inédits* (1901_1)(Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1985).

[Duchesneau 1993] Duchesneau, François, *Leibniz et la méthode de la science*(Paris: Presses Universitaires de France, 1993).

[Ferraro 2000] Ferraro, Giovanni, “Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler,” *Historia Mathematica*, **27**(2000), pp. 107-132.

[Ferraro 2007] Ferraro, Giovanni, *The Rise and Development of the Theory of Series Up to the Early 1820s*（Berlin etc. Springer Verlag, 2007）.

[Goldenbaum and Jesseph 2008] *Infinitesimal Differences: Controversies Between Leibniz and His Contemporaries*, edited by Ursula Goldenbaum and Douglas Jesseph(Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2008).

[Guicciardini 1999] Guicciardini, Niccolò, *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*(Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1989).

[Guicciardini 2009] Guicciardini, Niccolò, *Isaac Newton on Mathematical Certainity and Method*(Cambridge, London: The MIT Press, 2009).

[Hayashi 1998] Hayashi, Tomohiro, “Introducing Movement into Geometry: Roberval's Influence on Leibniz's Analysis Situs,” *Historia Scientiarum*, **8**(1998), pp. 53-69.

[Hayashi 2002] Hayashi, Tomohiro, “Leibniz's Construction of *Mathesis Universalis*: A Consideration of the Relationship between the Plan and His Mathematical Contributions,” *Historia Scientiarum*, **12**(2002), pp. 121-141.

[Hall 1980] Hall, Rupert A., *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz*(Cambridge: Cambridge University Press, 1980).

[Hofmann 1974] Hofmann, Joseph Ehrenfried, *Leibniz in Paris 1672-1676: His Growth to Mathematical Maturity*(Cambridge: Cambridge University Press, 1974).

[Knobloch 2006] Knobloch, Eberhard, "Beyond Cartesian Limits: Leibniz's Passage from Algebraic to "Transcendental" Mathematics," *Historia Mathematica*, **33**(2006), pp. 113-131.

[Varadarajan 2006] Varadarajan, V. S., *Euler through Time: A New Look at Old Themes* (American Mathematical Society, 2006).

[Youschkevitch 1976] Youschkevitch, A. P., "The Concept of Function Up to the Middle of the 19th Century," *Archive for History of Exact Sciences*, **16**(1976), pp. 37-85.

[石黒 2003] 石黒ひで『ライプニッツの哲学：論理と言語を中心に』(1984 年 $_1$)（岩波書店，2003 年（増補改訂版））.

[エイトン 1990] エイトン，E．J.『ライプニッツの普遍計画』渡辺正雄・原純夫・沢柳文男訳（工作舎, 1990 年）.

[カッツ 2005] カッツ，ヴィクター，J.『カッツ　数学の歴史』上野健爾・三浦伸夫監訳，中根美知代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡訳（共立出版，2005 年）.

[酒井他 2009] 酒井潔･佐々木能章編『ライプニッツを学ぶ人のために』(世界思想社，2009 年).

[酒井他 2012a] 酒井潔，佐々木能章，長綱啓典編『ライプニッツ読本』(法政大学出版局，2012 年）.

[酒井他 2012b] 酒井潔，佐々木能章，谷川多佳子，林知宏，山内志朗，米山優，長綱啓典「ライプニッツ研究のこれまで，いま，これから」，[酒井他 2012a] 所収，2-29 頁.

[佐々木 2002] 佐々木能章『ライプニッツ術:モナドは世界を編集する』(日本評論社，2002 年).

[下村 1989] 下村寅太郎『ライプニッツ』(1938 年 $_1$)（『下村寅太郎著作集』第七巻所収）（みすず書房，1989 年），1-220 頁.

[高瀬 2015] 高瀬正仁『微分積分学の史的展開：ライプニッツから高木貞治まで』(講談社，2015 年）.

[林 2000] 林　知宏「17-18 世紀における無限小をめぐる論争：ライプニッツを中心に」，『数学の思考』(『現代思想』2000 年 10 月増刊号）（青土社，2000 年）所収，176-195 頁.

[林 2001a] 林　知宏「無限小量をめぐる論争と基礎づけの問題，ライプニッツ，ヴァリニョン，ヘルマン」,『数学史の研究』（京都大学数理解析研究所講究録 1195，2001 年）所収，14-37 頁.

[林 2001b] 林　知宏「『人間知性新論』の数学史的背景」,『ライプニッツ』（『思想』2001 年 10 月号）（岩波書店，2001 年）所収，278-297 頁.

[林 2003a] 林　知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』（東京大学出版会，2003 年）.

[林 2003b] 林　知宏「ライプニッツと円周率」,『数学文化』**1**（日本評論社，2003 年），49-58 頁.

[林 2004] 林　知宏「ライプニッツの 2 進法：その歴史的評価を再考する」,『学習院高等科紀要』**2**（2004 年），69-103 頁.

[林 2009a] 林知宏「アイザック・ニュートンの 1680（？）年草稿「曲線の幾何学」について」,『京都大学数理解析研究所講究録』**1625**（2009 年），45-55 頁.

[林 2009b] 林知宏「数学史講義（第 3 回）: パリ時代（1672-1676）のライプニッツ」,『学習院高等科紀要』**7**（2009 年），31-73 頁.

[林 2009c] 林知宏「ライプニッツの数学：方程式論と代数的思考様式」，[酒井他 2009] 所収，37-56 頁.

[林 2012] 林知宏「数学史講義（第 6 回）: ニュートンの数学 1」,『学習院高等科紀要』**10**（2012 年），29-95 頁.

[林 2013] 林知宏「数学史講義（第 7 回）: ニュートンの数学 2」,『学習院高等科紀要』**11**（2013 年），13-66 頁.

[林 2014] 林知宏「数学史講義（第 8 回）: ニュートンの数学 3」,『学習院高等科紀要』**12**（2014 年），15-46 頁.

[林 2015] 林知宏「数学史講義（第 6 回）: ニュートンの数学 4」,『学習院高等科紀要』**13**（2015 年），17-69 頁.

[林 2016a] 林知宏「パリのライプニッツ」,『数学文化』**26**（日本評論社，2016 年），1-12 頁.

[林 2016b] 林知宏「数学史講義（第 6 回）: ニュートンの数学 5」,『学習院高等科紀要』**14**（2016 年刊行予定）.

[原 2013] 原亨吉『近世の数学：無限概念をめぐって』（1975 年 $_1$）（ちくま学芸文庫，2013 年）.

[マホーニィ 2007] マホーニィ，マイケル・S『歴史の中の数学』佐々木力訳（1982 年 $_1$）（ちくま学芸文庫，2007 年）.